Lycée Laymoune
2ème Bac. Compta.

Contrôle n°1
Modèle n°1

[2021-2022]
Semestre 1

EXERCICE.1

1°/ Calculer $h'(x)$: $h(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{2x+1}$

2°/ Calculer les limites suivantes :

ⓐ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x-4}{(x^3-8)^2}$; ⓑ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x-1}{x-4x^2+x^3}$

3°/ Montrer que l'équation : $(E) : 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $]1 ; 2[$

EXERCICE.2

Soit f la fonction définie sur $I = [0 + \infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$

1°/ Vérifier que : $(\forall x \in I)$ $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

2°/ Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3°/ Determiner : $J = f(I)$

4°/ Mq f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J puis déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

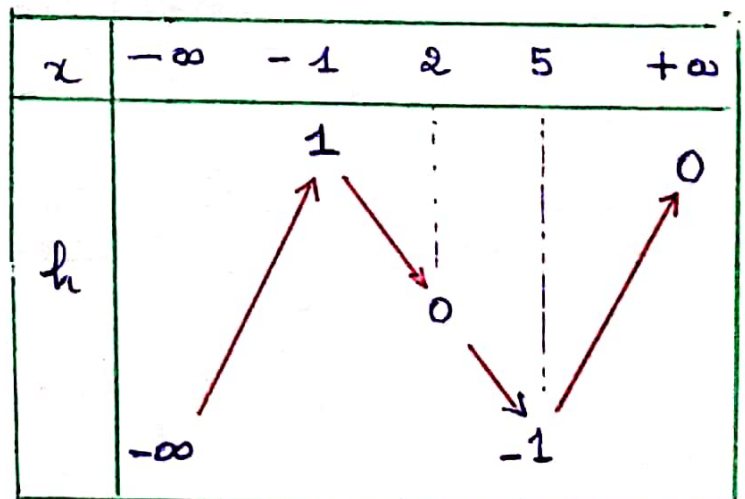
EXERCICE.3

Soit la fonction h définie par son tableau de variation :

1°/ Calculer $h(-1)$; $h(2)$

2°/ Déterminer $\lim\limits_{-\infty} h$ et $\lim\limits_{+\infty} h$

3°/ Déterminer $h([-1 ; 5])$ $h(]-1 ,+\infty[)$ et $h(\mathbb{R})$

4°) Dresser le tableau de signe de h sur $[-1 ; 5]$

Correction du modèle n° 1

EX. 1

1°) $h(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{2x+1}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

donc : $h'(x) = \dfrac{(x^3-4x)'(2x+1) - (x^3-4x)\times(2x+1)'}{(2x+1)^2}$

$= \dfrac{(3x^2-4)(2x+1) - (x^3-4x)\times 2}{(2x+1)^2}$

$= \dfrac{6x^3+3x^2-8x-4-(2x^3-8x)}{(2x+1)^2}$

$= \dfrac{6x^3+3x^2-8x-4-2x^3+8x}{(2x+1)^2} = \dfrac{4x^3+3x^2-4}{(2x+1)^2}$

2°/ ⓐ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-4}{(x^3-8)^2} = \text{“}\dfrac{6-4}{(8-8)^2}\text{”} = \text{“}\dfrac{2}{0^+}\text{”} = \boxed{+\infty}$

ⓑ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x-1}{x-4x^2+x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x^2} = \text{“}\dfrac{5}{+\infty}\text{”} = \boxed{0}$

3°/ soit : $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$

f est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme)

donc : f est continue sur $[1; 2]$

$f(1) = 2-3+1-1 = -1 < 0$

$f(2) = 2\times 16 - 3\times 8 + 4 - 1 = 32 - 24 + 3 = 11 > 0$

$f(1)\times f(2) < 0$; donc d'après T.V.I l'éq

(E) admet au moins une solution dans $]1; 2[$

EX.2 $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ $I = [0;+\infty[$

1°/ $(\forall x \in I)$ $f'(x) = \frac{(x-3)'(x+2)-(x-3)(x+2)'}{(x+2)^2}$

$= \frac{1\times(x+2)-(x-3)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x+3}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$

2°/ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \boxed{1}$

3°/ $f'(x) > 0$ donc f est ↗ sur I donc :

$J = f(I) = f([0;+\infty[) = [f(0); \lim_{+\infty} f[= [\frac{0-3}{0+2}; 1[= [-\frac{3}{2}; 1[$

4°/ f continue et strictement croissante sur I, donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J.

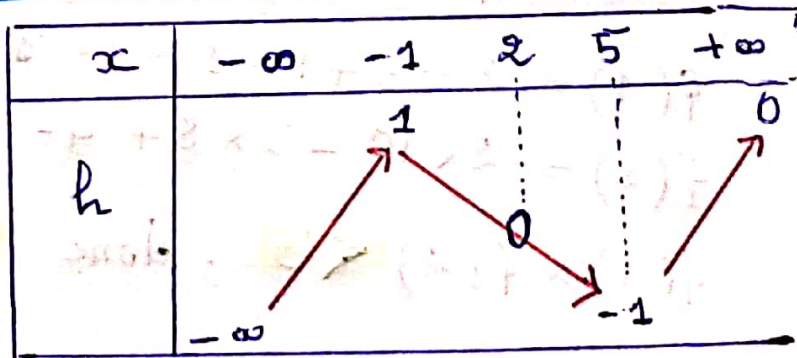
Soient $x \in J$ et $y \in I$ on a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$

$\Leftrightarrow x = \frac{y-3}{y+2} \Leftrightarrow x(y+2) = y-3$

$\Leftrightarrow xy + 2x = y-3 \Leftrightarrow xy - y = -2x-3$

$\Leftrightarrow -xy + y = 2x+3 \Leftrightarrow y(-x+1) = 2x+3$

$\Leftrightarrow y = \frac{2x+3}{-x+1}$ donc : $(\forall x \in J)$; $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{-x+1}$

EX.3 pour répondre au question : on utilise le tableau →

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
h	$-\infty$	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

1°/ $h(-1) = 1$

$h(2) = 0$

2°/ $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$

3°/ h est ↘ sur $[-1; 5]$ donc :

$h([-1; 5]) = [h(5); h(-1)] = [-1; 1]$

$h(]-1; +\infty[) = [-1; 1[$

$h(\mathbb{R}) = h(]-\infty; +\infty[) =]-\infty; 1]$

4°/ Tableau de signe sur l'intervalle $[-1; 5]$

on a :

x	-1	2	5
h	1 ↘ (+ + +)	0	↘ (− − −) -1

des images négatives

positive

donc le tableau de signe :

x	-1		2		5
h		$+$	0	$-$	

—★ fin du devoir ★—